

الحل النموذجي لإمتحان السداسي الثاني

تحليل رياضي

4.5

المعرج الأول : باستعمال خصائص الدالتين غاما وبيتا اثبات أن :

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du = \int_0^1 \sqrt{1-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \quad (0.5)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt$$

بالمطابقة مع تعريف الدالة بيتا نجد أن :

$$\begin{cases} x-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ y-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (0.5)$$

اذن :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-u^2} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

نعلم أن $\Gamma(2) = 1$

المعرج الثاني

لنكن المعادلة التالية :

$$y' + A(n)y = B(n)y^\alpha \quad \text{--- (1)}$$

ماذا سمى المعادلة (1) في الحالات التالية :

لما $\alpha = 0$: المعادلة (1) تصبح :

$$y' + A(n)y = B(n)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية حلها

يكون من الشكل :

$$I(n)y = \int I(n) B(n) dn + C$$

$$I(n) = e^{\int A(n) dn} \quad \text{حيث}$$

لما $\alpha = 1$: المعادلة (1) تصبح :

$$y' + A(n)y = B(n)y \Rightarrow y' + (A(n) - B(n))y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية حلها

$$\textcircled{1} \int_0^\infty u^m e^{-u^n} du \stackrel{?}{=} \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

$$u = t^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow t = u^n$$

$$du = \frac{dt}{n t^{\frac{n-1}{n}}} = \text{وحدة}$$

$$\int_0^\infty u^m e^{-u^n} du = \int_0^\infty t^{\frac{m}{n}} e^{-t} \cdot \frac{dt}{n t^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^\infty t^{\frac{m+1}{n} - 1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

$$\textcircled{2} B(n, n+1) = \frac{[\Gamma(n)]^2}{2 \Gamma(2n)}$$

لدينا :

$$B(n, n+1) = \frac{\Gamma(n) \Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(n) \cdot n \Gamma(n)}{2n \Gamma(2n)}$$

$$= \frac{[\Gamma(n)]^2}{2 \Gamma(2n)}$$

$$\textcircled{3} \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du = \frac{\pi}{4}$$

$$dt = 2\sqrt{t} du \Leftrightarrow t = u^2$$

نصبح وحدة

إذن الحل العام للنظام المعطى هو -

$$Y(n) = C_1 Y_1(n) + C_2 Y_2(n) + C_3 Y_3(n)$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2n} + C_2 \left[e^{an} \cos bn \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{an} \sin bn \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$+ C_3 \left[e^{an} \sin bn \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{an} \cos bn \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$Y(n) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2n} + C_2 \left[e^{2n} \cos n \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2n} \sin n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$+ C_3 \left[e^{2n} \sin n \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2n} \cos n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

حيث الروسكيان

$$W\{Y_1, Y_2, Y_3\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

ومن هنا الحل مستقر خطياً.

ج) لتكن مسألة القيمة الابتدائية

$$\begin{cases} y' = y^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

① أثبات أن f مستمرة ومحدودة على D
 f دالة كثير حدود فهي مستمرة على

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq a, |y| \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

$\exists M \geq 0$ و $|f(x, y)| \leq M \Leftrightarrow f$ محدودة

$$|f(x, y)| = |y^3| \leq b^3 = M$$

② أثبات أن f تحقق شرط ليبتز على D

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^3 - y_2^3| = |(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)(y_1 - y_2)|$$

$$= |y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2| |y_1 - y_2|$$

$$\leq (|y_1|^2 + |y_1 y_2| + |y_2|^2) |y_1 - y_2|$$

$$\leq (b^2 + b^2 + b^2) |y_1 - y_2|$$

$$\leq 3b^2 |y_1 - y_2|$$

$$\Rightarrow (2 - \lambda) [\lambda^2 - 2\lambda + 2] = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_{2,3} = 1 \pm i \end{cases}$$

الأسعة الذاتية

لما $\lambda_1 = 2$: لغوصنا في المعادلة الذاتية نجد

$$(A - 2I)C = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + C_3 = 0 \\ C_1 - C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = C_3$$

نأخذ $C_1 = 1$ ومنه

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y_1(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2n}$$

لما $\lambda_2 = 1 + i$: لغوصنا في المعادلة الذاتية

$$(A - 2I)C = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - (1+i) & 1 & 0 \\ -1 & 2 - (1+i) & 1 \\ 1 & 0 & 1 - (1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -iC_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + (1-i)C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 - iC_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = iC_1$$

نأخذ $C_1 = i$ نجد $C_2 = -1$ لغوصنا في

$$C_3 = 1 \text{ ومنه } C_3 = \frac{1}{i} C_1$$

$$C = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2(n) = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)n}$$

لما $\lambda_3 = 1 - i$ غير لازم لأنه

$$C = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int I(x) g(x) dx = \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{\ln x}{x}\right) dx$$

$$= - \int \frac{1}{x^2} \ln x dx$$

بإستعمال التكامل بالتجزئة:

$$\begin{cases} u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

ونضع

$$\int I(x) g(x) dx = - \left[-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \right]$$

$$= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$$

ونضع الحل العام للمعادلة هو

$$\frac{1}{x} \cdot z = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$$

$$\text{نضع } z = \frac{1}{y} \text{ ونضع}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$$

$$\frac{1}{y} = \ln x + 1 + Cx \Rightarrow y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$$

ب) إيجاد الحل العام للنظام $y' = Ay$ حيث

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① المعادلة المميزة

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

يكون من الشكل

$$I(x) y = \int I(x) \cdot 0 dx + C$$

$$I(x) = e^{\int (A(x)-B(x)) dx}$$

② كما نضع $A(x) = \frac{1}{x}$ و $B(x) = \frac{\ln x}{x}$ و $\alpha = 2$

المعادلة ① تصبح

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\ln x}{x} y^2 \quad (*)$$

المعادلة ② ستحول معادلة برنولي

الحل العام لهذه المعادلة

نقسم (*) على y^2 نجد

$$\bar{y}^2 y' + \frac{1}{x} \bar{y}^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

نضع

$$z = \bar{y}^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\bar{y}^{-2} \frac{dy}{dx} \quad (**)$$

نضرب (*) في (-1) نجد

$$-\bar{y}^2 y' - \frac{1}{x} \bar{y}^{-1} = -\frac{\ln x}{x}$$

نضع (***) في هذه الأخيرة نجد

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = -\frac{\ln x}{x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية حلها من الشكل

$$I(x) z = \int I(x) \cdot g(x) dx + C$$

$$g(x) = -\frac{\ln x}{x}$$

$$I(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

ومنه f تحقق شرط ليبشيتز مع $k=3b^2$ وهو ثابت ليبشيتز

(3) الاستنتاج 8

من المسؤاليات السابقتين (1) و (2) نستنتج أن مسألة القيمة الابتدائية تقبل حل وحيد في المنطقة $h \leq |x - x_0|$ حيث

$$h = \min(a, \frac{b}{b^3}) \leq h = \min(a, \frac{b}{M})$$

$$h = \min(a, \frac{1}{b^2})$$

h متعلق بقيم a و b ومنه من أجل

$$a=b=2 \quad h = \min(2, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

إذاً مسألة القيمة الابتدائية المعطاة تقبل

حل وحيد في المنطقة $|x| \leq \frac{1}{4}$

(4) طريقة بيكارد لإيجاد التقريب الثاني للحل 8

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds$$

$$y_n = 0 + \int_0^x y_{n-1}^3(s) ds \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$y_1 = \int_0^x y_0^3(s) ds = \int_0^x 0 ds = 0$$

$$y_2 = \int_0^x y_1^3(s) ds = \int_0^x 0 ds = 0$$

التمرين الثالث 3.5

لنكن المعادلة التالية 8

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \quad (2)$$

المرفقة بالشروط الحدية

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

(1) المعادلة (2) تسمى معادلة ستورم-ليوفيل المعادلة لأنها مكتوبة

من الشكل 8

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (q(x) + \lambda s(x)) y(x) = 0$$

$$p(x) = 1 \quad q(x) = 0$$

العدد الثابت λ يسمى بالقيمة

الذاتية لمسألة ستورم-ليوفيل

(2) إيجاد الحل الخاص للمعادلة (2) 8

$$y'' + y = 0 \quad (\text{مع } y(0) = 0, y'(\pi) = 0)$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

ومنه الحل العام يكتب من الشكل 8

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

بالقيد في الشروط الابتدائية 8

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \\ y'(\pi) = 0 \Rightarrow -\pi C_1 \sin \pi + \pi C_2 \cos \pi = 0 \end{cases}$$

ومنه الحل الخاص للمعادلة المعطاة

$$y(x) = 0$$

(3) المعادلات الشاذة لستورم-ليوفيل

هنا؟
 {
 - هوموجين
 - تباين
 - لا حيز
 - لا قير
 }
 (0.5)